Vlastné cyklické a vlastné komutatívne grupy

VERONIKA LACKOVÁ

UK, Bratislava, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Vieme, že každá podgrupa komutatívnej grupy je komutatívna a normálna, každá podgrupa cyklickej podgrupy je cyklická. Otázkou je, či tieto vlastnosti môžu mať aj niektoré nekomutatívne grupy, alebo v treťom prípade grupy, ktoré nie sú cyklické. Takéto grupy naozaj existujú. Netriviálnym príkladom na grupy s komutatívnymi vlastnými podgrupami sú nekomutatívne p^3 prvkové grupy (p je prvočíslo). Všetky ich vlastné podgrupy sú rádu 1, p alebo p^2. Grupy rádu p sú samozrejme cyklické, a teda aj komutatívne, a dá sa dokázať, že aj všetky p^2 prvkové grupy sú komutatívne. Grupy, ktorých všetky vlastné podgrupy sú komutatívne nazývame vlastné komutatívne.

Podobným pojmom sú vlastné cyklické grupy - grupy, ktoré majú všetky vlastné podgrupy cyklické. Túto vlastnosť majú napríklad grupy rádu pq (p, q sú prvočísla), lebo všetky ich vlastné podgrupy majú 1, p alebo q prvkov, teda sú cyklické.

Ďalšou triedou grúp, ktorou sa v práci zaoberáme sú hamiltonovské grupy, teda grupy, ktoré majú všetky podgrupy normálne. Hamiltonovské grupy sú charakterizované v [Hall, 1963], [Zassenhaus, 1949]. V práci ale uvádzame vlastný dôkaz úplnej charakterizácie pre konečné grupy: konečná nekomutatívna grupa je hamiltonovská práve vtedy, keď je izomorfná s $Q_8 \times (Z_2)^n \times G$, kde Q_8 je grupa kvaterniónov (jedna z nekomutatívnych 8 prvkových grúp) a G je komutatívna grupa s nepárnym počtom prvkov. Máme príklad na nekonečné hamiltonovské grupy: stačí v predošlom vzorci zobrať ako G nekonečnú komutatívnu grupu, v ktorej je každý prvok nepárneho rádu.

Pre konečné vlastné cyklické grupy máme úplnú charakterizáciu: konečná grupa je vlastná cyklická práve vtedy, keď je izomorfná s jednou z grúp Z_n, $Z_p \times Z_p$, Q_8, polopriamy súčin $Z_q \times_\Theta Z_{p^n}$, kde p, q sú rôzne prvočísla, $q \equiv 1 \mod p$, $\Theta : Z_{p^n} \to Aut(Z_q)$ a $\mathrm{rad}(\Theta(1)) = p$.

Príkladom nekonečnej vlastnej cyklickej grupy je faktorová grupa $Z_{p^\infty} = [\{1/p^n;\ n \in N\}]/Z$.

Pre vlastné komutatívne grupy máme príklady na triedy grúp s touto vlastnosťou:

polopriamy súčin $(Z_q)^m \times_\Theta Z_{p^n}$, kde p, q sú rôzne prvočísla a m je najmenšie také, že $q^m \equiv 1 \mod p$ a tiež platí, že $\mathrm{rad}(\Theta(1)) = p$

p-grupa v tvare polopriameho súčinu $Z_{p^n} \times_\Theta Z_{p^m}$, kde $n \geq 2$, ak položíme $\Theta(1)(1) = x$, tak platí, že $px \equiv p \mod p^n$ a $x^p \equiv 1 \mod p^n$.

Okrem toho sme dokázali, že ak G je vlastná komutatívna grupa, ktorej rád je deliteľný rôznymi prvočíslami p, q, a G je nekomutatívna, tak G je opäť polopriamy súčin v tvare $G \cong (Z_q)^m \times_\Theta Z_{p^n}$, pričom platí $\mathrm{rad}(\Theta(1)) = p$.

Literatúra

[Hall, 1963] Hall, M. (1963). The theory of groups. New York: The Macmillan Company.

[Zassenhaus, 1949] Zassenhaus, H. (1949). The theory of groups. New York: Chelsea Publishing Company.

[Mac Lane a Birkhoff, 1974] Mac Lane, S. a Birkhoff, G. Algebra. Bratislava: Alfa.